

Моделювання поверхні, відбитих сонячних променів від фасадів

Ольга Андропова

Київський національний університет будівництва і архітектури
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037
profie21@gmail.com, orcid.org/0000-0002-4500-6225

DOI: 10.32347/2310-0516.2018.11.47-52

Анотація. Існує велика кількість фасадів будинків у вигляді поверхонь 2-го порядку та складніших. Кожна поверхня має свої особливості відбиття сонячних променів. Виникає потреба аналізу цього відбиття для виявлення зон концентрації потоку сонячних променів, що створюють зони перегріву, та знаходження зон з дифузним відбиттям сонячних променів. Виявлення таких ділянок дозволяє коригувати фасади на стадії проектування для створення комфортного середовища існуючої забудови та надає можливість аналізу освітлення протилежних будівель.

Існуюча теорія конгруенцій дозволяє проаналізувати відбиття сонячних променів синтетично з геометричної точки зору та представити їх аналітично. Двопараметрична множина нормалей поверхні фасаду розширюється на відповідні поверхні нормалей до головних твірних вздовж перерізу площиною. Відносно тих самих твірних конгруенція відбитих поверхнею сонячних променів розширюється на поверхні відбитих променів. Доцільно використовувати систематизацію відбиваючих поверхонь по принципу поверхонь нормалей до їх твірних, що дає можливість використовувати поверхні відбитих променів з типовими характеристиками для певних типів поверхонь нормалей. Завдяки вказаному методу можна отримувати квазіфокальні лінії поверхонь відбитих променів в яких спостерігається концентрація відбиттів та, відповідно, зони перегріву. З вказаного методу на пряму виходить можливість підбирати форми поверхонь фасадів по наперед заданим умовам, варіативно моделюючи їх на основі відомих поверхонь відбитих променів.



Ольга Андропова
асистент кафедри
архітектурних конструкцій

На основі вказаного алгоритму аналітичної побудови можна використовувати відбиваючі поверхні будь-якої складності, зокрема, поверхні 2-го порядку, торсові, каналові, поверхні переносу, поверхні обертання та інші, а також об'єднанні вздовж ліній основних перетинів.

В роботі розглядається моделювання відбитих сонячних променів за допомогою аналітичних рівнянь поверхонь відбитих променів. Ці розрахунки дозволяють проектувати фасади нових будинків залежно від поставлених завдань. Подальші дослідження можливі для комп'ютерної візуалізації поверхонь відбитих сонячних променів.

Ключові слова. Поверхня відбитих променів, конгруенція, поверхня нормалей, інсоляція.

ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Основні дослідження набору форм відбиваючих поверхонь проводилися у задачах геліотехніки та акустики. Досліджувалися відбиваючі поверхні, у яких конгруенція нормалей розширюється на плоскі пучки, конічні поверхні, гіперболічні параболоїди та поверхні 2го і вищих порядків.

Використання методів побудови відбиваючих поверхонь у задачах інсоляції та виявлення зон перегріву фасадів повинно вирішуватися ще на початкових етапах проектування. Пропонується розглянути поверхні відбитих сонячних променів від поверхонь 2го порядку загального типу та більш складних за допомогою аналітичного та геометричного опису при невласному джерелі світла.

АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

У ряді робіт проведено дослідження відбиваючих властивостей поверхонь та поверхонь відбитих сонячних променів [1-5], досліджено самі поверхні, такі як конічні, циліндричні поверхні, поверхні обертання, трубчаті та каналові поверхні, косі лінійчаті поверхні [6-10], розглянуто торсові поверхні, як циліндричні так і конічні [11,12]. Визначено зони з максимальною концентрацією відбитого потоку променів для геліосистем, що визначається квазіфокальними лініями, та зони з мінімальною концентрацією відбитого потоку променів, що визначається карстовими зонами конгруенції відбитих променів. Розроблено модель прямого сонячного опромінення, опрацьовано питання інсоляції та освітлення на прикладі комплексу прямих 2-го порядку, виконано комп'ютерне моделювання потоків змінного напрямку сонячних променів. Розглянуто нові напрямки використання геометричних та аналітичних розрахунків в архітектурі [13,14], наведено великий перелік аналітичних поверхонь які можна використовувати в архітектурі, надано рівняння та приклади побудов [15-19].

ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

Проектування нових будинків повинно вирішувати основні питання стосовно проблем енергозбереження [20]. На Рис.1,а, зображено складну поверхню фасаду на прикладі будинку готелю Vdara Hotel & Spa у Лас Вегас, США, на якій необхідно враховувати відбиваючі від неї проміні на існуючі фасади та територію. Приклад побу-

дови поверхні відбитих променів від конічної поверхні, показано на рис.1, б.

Для аналітичного описання моделі побудови поверхні відбитих променів скористаємось канонічним рівнянням конуса з вершиною на початку координат. Рівняння дотичної площини у точці відбиття $A(x_a, y_a, z_a)$ має вигляд (2). Звідки отримаємо рівняння (3) та (4).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (1)$$

$$F'_x(x - x_a) + F'_y(y - y_a) + F'_z(z - z_a) = 0. \quad (2)$$

$$\frac{x_a x}{a^2} + \frac{y_a y}{b^2} - \frac{z_a z}{c^2} = 0. \quad (3)$$

$$\frac{x_a}{a^2} x + \frac{y_a}{b^2} y + \left(-\frac{z_a}{c^2}\right) z = 0. \quad (4)$$

Опишемо рівняння дотичної до конуса площини у вигляді (5).

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (5)$$

Опустимо перпендикуляр на дотичну площину із точки $S_1(x_s, y_s, z_s)$ та напишемо рівняння у вигляді (6).

$$\frac{x - x_s}{A} = \frac{y - y_s}{B} = \frac{z - z_s}{C}. \quad (6)$$

Для визначення координат основи перпендикуляра точки $P(x_p, y_p, z_p)$ необхідно разом вирішити рівняння дотичної площини та рівняння перпендикуляра на дотичну площину. Таким чином це рівняння буде мати вигляд (7). Вирішення буде мати вигляд (8).

$$\begin{cases} \frac{x - x_s}{A} = \frac{y - y_s}{B}; \\ \frac{y - y_s}{B} = \frac{z - z_s}{C}; \\ Ax + By + Cz = 0. \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} x_p &= -\frac{-B^2x_s - C^2x_s + AB y_s + AC z_s}{A^2 + B^2 + C^2}; \\ y_p &= -\frac{ABx_s - A^2y_s - C^2y_s + BCz_s}{A^2 + B^2 + C^2}; \\ z_p &= -\frac{ACx_s + BCy_s - A^2z_s - B^2z_s}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Скориставшись рівнянням ділення відрізка SIS' навпіл знаходимо координати $P(x_p, y_p, z_p)$ у формулі (9).

$$x_p = \frac{x_s + x_{s'}}{2}, \quad y_p = \frac{y_s + y_{s'}}{2}, \quad z_p = \frac{z_s + z_{s'}}{2}, \quad (9)$$

звідки знаходимо координати точки $S'(x_s, y_s, z_s)$ записуємо у вигляді (10).

$$x_{s'} = 2x_p - x_s, \quad y_{s'} = 2y_p - y_s, \quad z_{s'} = 2z_p - z_s. \quad (10)$$

$$Jx + Fy + Gz + K = 0. \quad (11)$$

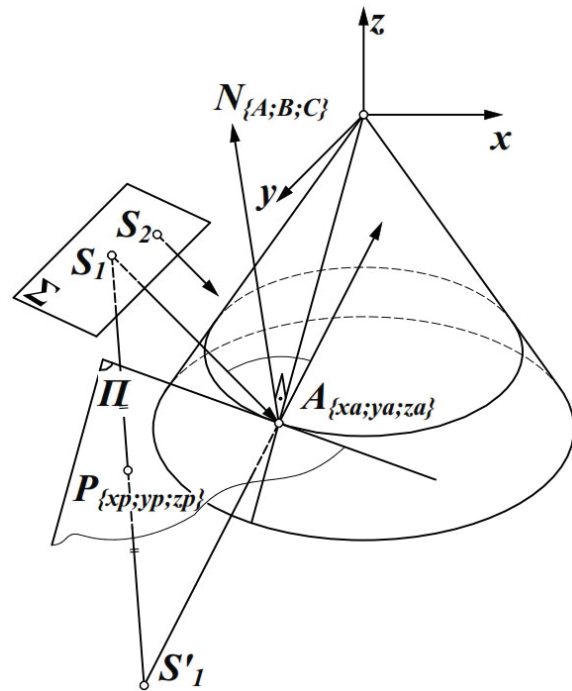
Тоді падаючий промінь SIA має параметричне рівняння (12), де x_a, y_a, z_a – координати точки A .

$$\begin{aligned} x_s &= x_a + Jt, \\ y_s &= y_a + Ft, \\ z_s &= z_a + Gt. \end{aligned} \quad (12)$$

Змінюючи координати точки A на еліптичну твірну, отримаємо рівняння циліндра падаючих променів (13).



a



б

Рис.1. Приклад моделювання відбитих сонячних променів: *a* – зображення складної поверхні фасаду на прикладі готелю Vdara Hotel & Spa у Лас Вегас США; *б* – приклад побудови відбитого сонячного променя від поверхні конуса 2го порядку із невластного джерела світла. Умовні позначення (тут і надалі): S' - невластне джерело світла, Σ – площина перпендикулярна потоку сонячних променів, N - нормаль до конуса у точці A , Π – дотична площина до поверхні конуса у тоці A

Fig.1. Example of the modelling of reflected sun rays: *a* – the example the facade surface at the hotel Vdara Hotel & Spa in Las Vegas, USA; *б* – an example of the construction of a reflected sun rays from the conical surfaces of a 2nd order from a non-own light source. Symbols (here and below): S' - a non-own light source, Σ – the plane perpendicular to the flow of sun rays, N - normal to the cone at point A , Π – the tangent plane to the surface of the cone at point A

$$\begin{aligned}x &= x_s = a \cos u + Jt, \\y &= y_s = b \sin u + Ft, \\z &= z_s = c + Gt.\end{aligned}\quad (13)$$

По отриманим рівнянням побудовані поверхні відбитих променів можна побачити на Рис.2, (а та б).

ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Отримання рівнянь поверхонь відбитих променів дає можливість вирішити низку задач та відкриває широкі перспективи подальших досліджень. Конгруенція поверхонь відбитих променів від відбиваючої поверхні фасаду показує ділянки фасадів, які дають дифузне розповсюдження відбитого сонячного світла або його концентрацію, що дає можливість розрахувати ділян-

ки перегріву на фасадах сусідніх будівель або території. Також зазначений метод дає змогу корегувати форму фасадів на стадії проектування для уникнення зон перегріву або аналізу освітленості приміщень відбитим світлом будинків розташованих навпроти, розташування засобів сонцезахисту. Дослідження розширеного переліку відбиваючих поверхонь згідно методу, що розглядається, дозволяє вирішити зворотну задачу отримання форми відбиваючої поверхні по заданим параметрам поверхні відбитих променів. Використання сучасними архітекторами високих технологій, як показує архітектурна практика, дозволяє будувати трансформовані фасади, керування якими змінює їх відбиваючі властивості. Відповідно, геометричний та аналітичний аналіз відбиттів надає можливість отримувати бажані відбиваючі ефекти.

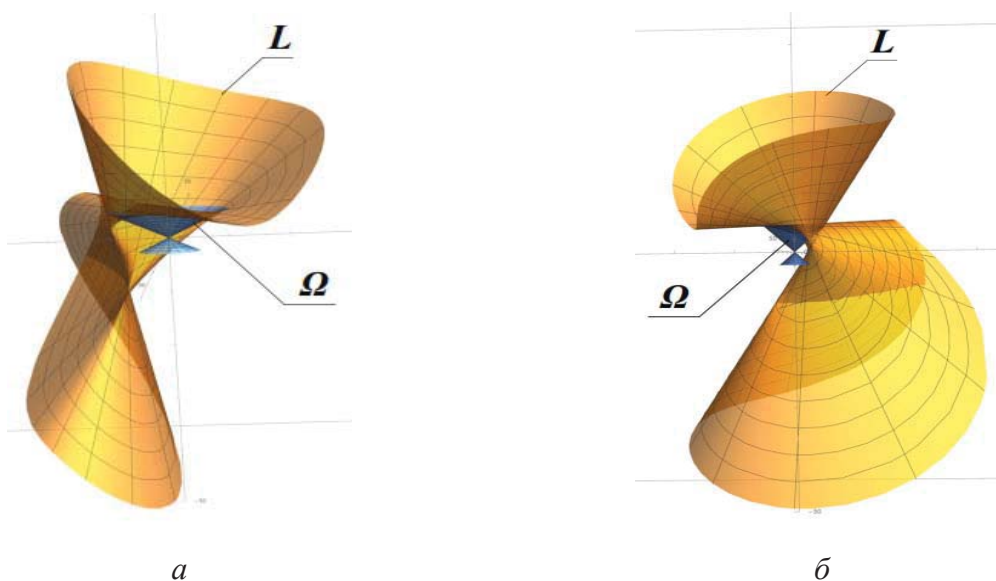


Рис.2. Приклад моделювання поверхні відбитих сонячних променів у програмі Mathematica: *a* – зображення поверхні з боку площини XOZ ; *б* – зображення поверхні з боку площини YOZ . Умовні позначення (тут і надалі): S' - не власне джерело світла, Σ – площина перпендикулярна потоку сонячних променів, N - нормаль до конуса у точці A , Π – дотична площина до поверхні конуса у точці A , Ω – відбиваюча поверхня конуса 2-го порядку загального виду, L - поверхня відбитих променів.

Fig.2. Example of modelling of reflected sun rays: *a* – the example the facade surface at the hotel Vdara Hotel & Spa in Las Vegas, USA; *б* – an example of the construction of a reflected sun rays from the conical surfaces of the 2nd order from a non-own light source. Symbols (here and below): S' - a non-own light source, Σ – the plane perpendicular to the flow of sun rays, N - normal to the cone at point A , Π – the tangent plane to the surface of the cone at point A , Ω – the reflecting surface of the cone of the second order of the general form, L - the surface of the reflected rays.

Зазначені методи аналізу поверхонь відбитих променів також можна застосувати в суміжних прикладних областях, таких як акустика, геліотехніка.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Подгорний О., Снисаренко Н.** О множестве отраженных лучей при точечном и линейном освещении. *Прикладная геометрия и инженерная графика*. Киев, 1969. 8. С. 128-135.
2. **Подгорный А.** Поверхности отражённых лучей. *Прикладная геометрия и инженерная графика*. Киев, 1975. 20(13). 16 с.
3. **Підгорний О.** Відбиття від ортотоміки при паралельних падаючих променях. *Праці ТДАТА*. Мелітополь, 2002. 4(15). 9-15 с.
4. **Підгорний О., Дворецкий О.** Апарат відбиття для ортотоміки при паралельних падаючих променях. *Праці ТДАТА*. Мелітополь, 2002. 4(11). 10-16 с.
5. **Козак Ю.** Дослідження поверхонь нормалей як засіб систематизації поверхонь відбиття. *Енергоефективність в будівництві та архітектурі*. К. : КНУБА, 2013. 5. 66-69 с.
6. **Krivoshapko S.** Static analysis of shells with developable middle surfaces. *Applied Mechanics Reviews (USA)*. 1998. 12(1).731-746 p. doi.org/10.1115/1.3098985
7. **Pottmann H., Wallner J.** Computational Line Geometry. Berlin : Springer-Verlag, 2001. 565p. doi.org/10.1007/978-3-642-04018-4
8. **Maan H.** Design of Plate and Shell Structures. *New York. ASME*. 2004. 476 p.
9. **Renton J.** Characteristic response of hollow cones. *J.Elast.*1997. 49(2). 101-112 p.
10. **Jürgen R.-G.** Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour through Real and Complex Geometry. Berlin : Springer, 2011. 571 p.
11. **Підгорний О.** Розшарування конгруенцій нормалей поверхонь 2-го порядку вздовж ліній плоских перерізів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К. : КДТУБА, 1996. 60. 8-14 с.
12. **Козак Ю.** Геометричне моделювання відбиттів від торсових поверхонь. *Сучасні проблеми моделювання*. Мелітополь, 2017. 9. 63-68 с.
13. **Saunders A., Nulman A.** Surface Logic. *The Mathematica Journal*. 2009. 11(3). 404-429 p. doi.org/10.3888/tmj.11.3-7
14. **Glaeser G., Gruber F.** Developable surfaces in contemporary architecture. *Journal of Mathematics and the Arts*. 2007. 1(1). 59-71 p. doi.org/10.1080/17513470701230004
15. **Krivoshapko S., Ivanov V.** Encyclopedia of Analytical Surfaces. Springer International Publishing Switzerland. 2015. 752 p. doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7
16. **Gray A.** Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, CRC Press LLC. 1997. 531 p.
17. **Agnew A., Bobe A., Boskoff W., Suceava B.** Tzitzeica Curves and Surfaces. *The Mathematica Journal*. 2010. 12. 1-18 p. doi.org/10.3888/tmj.12-3
18. **Barrère R.** An Analytical Approach to Form Modeling As an Introduction to Computational Morphology. *The Mathematica Journal*. 2009. 11(2). 186-225 p.
19. **Kivelä S.** On the Visualization of Riemann Surfaces. *The Mathematica Journal*. 2009. 11(3). 392-403 p.
20. **Сергейчук О.** Геометричне моделювання фізичних процесів при оптимізації форми енергоефективних будинків. *Дисертація доктора технічних наук*. Київ. 2008. 425 с.

REFERENCES

1. **Podgorny O., Snisarenko N. (1969).** O mnozestve otrazennyh luchey pry tochechnom i lineynom osvecshenii [On the set of reflected rays in point and linear illumination]. *Prikladnaya geometriya i ingenernaya grafika*. Kiev. 8, 128-135.
2. **Podgorny O. (1975).** Poverhnosty otrazhennyh luchey [Surfaces of reflected rays]. *Prikladnaya geometriya i ingenernaya grafika*. Kiev. 20(13), 16.
3. **Podgorny O. (2002).** Vidbyttya vid ortomiky, pry paralelnykh padauchykh promenyah [Reflection from orthotomics at parallel incident rays]. *Praci TADA*. 4(15), 9-15.
4. **Podgorny O., Dvoreckiy O. (2002).** Aparat vidbyttya dlya ortomiky, pry paralelnykh padauchykh promenyah. *Praci TADA*. Melitopol. 4(11). 10-16.
5. **Kozak Yu. (2013).** Doslidzennya poverhon normaley yak zasib systematyzacii poverhon vidbyttya [Surveying of normal surfaces as a means of systematization of reflection surfaces]. *Energoefektivnist v budivnyctvi ta arhitekturi*. Kyiv. 5, 66-69.
6. **Krivoshapko S.N. (1998).** Static analysis of shells with developable middle surfaces. *Applied Mechanics Reviews. (USA)*. 12(1), 731-746. doi.org/10.1115/1.3098985

7. **Pottmann H., Wallner J. (2001).** Computational Line Geometry. Berlin : *Springer-Verlag*, 565. doi.org/10.1007/978-3-642-04018-4
8. **Maan H. (2004).** Design of Plate and Shell Structures. New York. ASME, 476.
9. **Renton J. (1997).** Characteristic response of hollow cones. *J. Elast.* 49(2), 101-112.
10. **Jürgen R.-G. (2011).** Perspectives on Projective Geometry: A Guided Tour through Real and Complex Geometry. Berlin : Springer, 571.
11. **Pidgorny O. (1996).** Roztashuvannya kongruencyi normalyey poverhon 2-go porjadku vzdovz liniy ploskyh pereriziv [Stratification of congruences of normal surfaces of the 2nd order along the lines of plane cross sections]. *Prikladnaya geometriya i inzhenernaya grafika*. Kiev. 60, 8-14.
12. **Kozak Yu. (2017).** Geometrychne modeluvannya vidbyttiv vid torsovyh poverhon [Geometric modeling of reflections from torso surfaces]. *Suchasni problem modeluvannya. Zbirnyk naukovykh prac*. Melitopol. 9, 63-68.
13. **Saunders A., Nulman A. (2009).** Surface Logistic. *The Mathematica Journal*. 11(3), 404-429. doi.org/10.3888/tmj.11.3-7
14. **Glaeser G., Gruber F. (2007).** Developable surfaces in contemporary architecture. *Journal of Mathematics and the Arts*. 1(1). 59-71. doi.org/10.1080/17513470701230004
15. **Krivoshapko S., Ivanov V. (2015).** Encyclopedia of Analytical Surfaces. Springer International Publishing Switzerland, 752. doi.org/10.1007/978-3-319-11773-7
16. **Gray A. (1997).** Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica, 2nd ed. Boca Raton, CRC Press LLC, 531.
17. **Agnew A., Bobe A., Boskoff W., Suceava B. (2010).** Tzitzeica Curves and Surfaces. *The Mathematica Journal*. 12, 1-18. doi.org/10.3888/tmj.12-3
18. **Barrère R. (2009).** An Analytical Approach to Form Modeling As an Introduction to Computational Morphology. *The Mathematica Journal*, 11(2), 186-225.
19. **Kivelä S. (2009).** On the Visualization of Riemann Surfaces. *The Mathematica Journal*. 11(3), 392-403.
20. **Sergeychuk O. (2008).** Geometrychne modeluvannya fizychnykh procesiv pry optymizacii formy energoefektivnykh budynkiv [Geometric modeling of physical processes in optimizing the form of energy-efficient buildings]. *Dysertaciya doctora tehnichnykh nauk*. Kyiv, 425.

Surface modeling, sunlight reflected from facades

Olga Andropova

Summary. There is a large number of complex surfaces of the facades of houses of the 2nd and higher orders. Each surface has its own reflection of sun rays. There is a need for an analysis of these reflections for the detection of zones of concentration of the stream of sun rays, which create zones of overheating, and zones with the diffuse reflection of sun rays. Detection of these zones makes it possible to correct facades at the design stage of a complex form to create a comfortable environment for existing homes and territories and allows to analyze the illumination of opposite buildings.

The existing theory of congruence allows us to analyze the reflection of solar rays synthetically from a geometric point of view and to present them analytically. The two-parameter set of normals of the facade surface is layered on the corresponding surfaces of the normals to the main generatrices along the plane section. Relatively to the same generatrices congruence reflected by the surface sun rays is layered on the surface of reflected rays. It is advisable to use the systematization of reflecting surfaces on the principle of surfaces of normals to their generations, which makes it possible to use the surfaces of reflected rays with typical characteristics for certain types of surface of normals. Thanks to this method, quasi-focal lines of the surfaces of reflected rays can be obtained as reflection concentration and, in response, the overheating zone. From the indicated method directly, it is possible to select the shape of the facade surfaces according to the given conditions and to model them on the basis of the known surfaces of the reflected rays. On the basis of the specified analytic algorithm, it is possible to use reflecting surfaces of any complexity, in particular, surfaces of the 2nd order, developable surfaces, channel, transfer surfaces, surfaces of revolution and others, as well as joining surfaces along the lines of main sections.

The article considers the modeling of reflected sun rays by means of analytical equations of surfaces of reflected rays. These calculations are necessary for designing facades of new homes, depending on the tasks. Further research is possible for computer visualization of surfaces of reflected sun rays.

Keywords. Surface of reflected sun rays, congruence, surface normal, insolation.