

## Деякі аспекти визначення рівня освітленості криволінійних поверхонь від точкових джерел

Ганна Копасова<sup>1</sup>, Володимир Скочко<sup>2</sup>, Сергій Кожедуб<sup>3</sup>

Київський національний університет будівництва і архітектури  
31, просп. Повітрофлотський, Київ, Україна, 03037

<sup>1</sup> annkompas@gmail.com, orcid.org/0000-0003-4862-0762

<sup>2</sup> vladimir.and.friends@gmail.com, orcid.org/0000-0002-1709-2621

<sup>3</sup> ksa.knuba@gmail.com, orcid.org/0000-0001-6315-8161

DOI: 10.32347/2310-0516.2019.13.7-13

**Анотація.** Як правило, для визначення рівня освітленості поверхонь від точкових джерел користуються досить простою закономірністю (законом обернених квадратів) та шаблонними правилами побудови падаючих променів.

Дана закономірність найбільш застосовна для ділянок поверхні, що представляють собою фрагменти площин (або близькі до площин).

При цьому, при проектуванні дизайну внутрішнього або зовнішнього середовища дуже часто зустрічаються предмети та об'єкти, поверхні яких є криволінійними. Водночас із цим, одним із основних завдань дизайнерів та архітекторів є забезпечення достатнього рівня освітленості предметів інтер'єрів та екстер'єрів для забезпечення достовірності сприйняття їх форм та кольорових рішень, а також для досягнення необхідного рівня зорового комфорту. Врешті решт, у зв'язку з високою складністю та різноманітністю просторових форм, фахівцям доводиться використовувати для розрахунків, пов'язаних із визначенням або перевіркою рівня освітленості, програмні засоби комп'ютерного моделювання. В той же час інструментальні засоби, що передбачають ручні розрахунки стають все менш актуальними. В процесі програмної реалізації математичних методів та алгоритмів визначення рівня освітленості, стає важливим виключення ймовірності допущення розрахункових помилок, пов'язаних із нездатністю програмного забезпечення до логічного мислення та аналізу перешкод на шляху поширення світлових променів. Зокрема, коли мова йде про аналіз характеру освітленості поверхні від точкового джерела (яким можна умовно вважати майже будь-який освітлювальних прилад, що рівномірно розсіює



**Ганна Копасова**  
аспірант кафедри  
архітектурних конструкцій



**Володимир Скочко**  
доцент кафедри  
архітектурних конструкцій  
к.т.н., доц.



**Сергій Кожедуб**  
доцент кафедри  
архітектурних конструкцій  
к.т.н.

світло і розміри якого набагато менші у порівнянні з габаритами оточуючих предметів), виявляється, що використання закону обернених квадратів не дозволяє ідентифікувати зони самозатінення при його програмній реалізації у класичній формі без накладання додаткових обмежень. Такі обмеження проявляються у застосуванні ряду логічних операторів та шаблонних алгоритмів виявлення ділянок падіння власної тіні. Для уникнення необхідності розробки відповідних алгоритмів у даному дослідженні пропонується модифікувати форму запису закону обернених квадратів, увівши до нього додаткові математичні функції. Ці функції дозволятимуть автоматично відслідковувати

локальний характер зміни кута нахилу дотичних до досліджуваних точок освітлюваних поверхонь.

Відповідна модифікація дасть змогу полегшити процес програмної реалізації процесу відтворення розподілу освітленості по криволінійній поверхні.

**Ключові слова.** Освітлювальні прилади; точкове джерело світла; закон обернених квадратів; комп'ютерне моделювання.

## ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

Як було зазначено вище, закон обернених квадратів у своїй класичній формі запису погано адаптований до програмної реалізації в середовищі пакетів комп'ютерного чисельного моделювання. Це пов'язано в першу чергу з тим, що без додаткових програмних алгоритмів на основі логічних операторів результати побудови поля розподілу освітленості по криволінійній поверхні можуть бути хибними.

Зокрема, відповідний закон передбачає, що в процесі обчислення змінюється положення досліджуваної точки на поверхні освітлюваного об'єкту, а сама поверхня – це фрагмент площини. У зв'язку з цим, для застосування даного закону будь-яка поверхня повинна бути попередньо дискретизована шляхом апроксимації або дискретної інтерполяції таким чином, щоб її окремі фрагменти були представлені плоскими опуклими багатокутниками (полігонами). Однак, такий підхід не завжди зручний та простий в реалізації. Слід зазначити, що в окремих випадках процес дискретизації призводить до часткової або повної втрати диференціальних властивостей початкової поверхні-прообразу. А значить і картина освітленості може відобразитися некоректно. Більше того, якщо поверхня представлено дискретним набором фрагментів площин, то існує ймовірність помилок аналізу взаємного розташування кожного із фрагментів та променів світла, в результаті чого окремі з цих фрагментів, які мають бути затінені іншими (сусідніми) будуть хибно освітлені.

Відтак, адаптація закону обернених квадратів до можливості безпосереднього за-

стосування при аналізі рівня освітленості криволінійних поверхонь від точкових джерел є актуальною практичною задачею.

## АНАЛІЗ ПОПЕРЕДНІХ ДОСЛІДЖЕНЬ

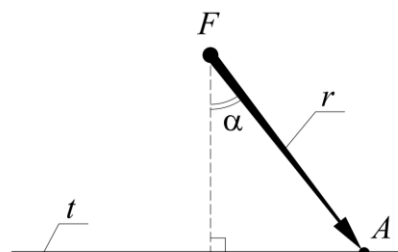
У фотометрії та світлотехніці [8, 9, 12-16, 18-20] значення освітленості у точці поверхні, яка розташована перпендикулярно до точкового джерела світла, подається вищезгаданою закономірністю – «законом обернених квадратів», тобто є обернено пропорційним до квадрата відстані  $l$  від цієї точки до даного джерела з силою світла  $I$ . У математичній формі цей закон записується наступним чином:

$$E = I/l^2 . \quad (1)$$

Значення освітленості в довільній точці плоскої поверхні визначається згідно періодичної закономірності зміни освітленості, вираженої за допомогою косинуса кута  $\alpha$  (між нормаллю, опущеною на площину  $t$  від джерела світла  $F$ , та напрямком поширення променів до досліджуваної точки  $A$ ) [13-15, 18, 19]:

$$E_{\alpha} = E \cdot \cos \alpha = (I/r^2) \cdot \cos \alpha , \quad (2)$$

де  $E_{\alpha}$  – освітленість в точці  $A$  площини  $t$ ;  $I$  – сила світла джерела  $F$  в напрямку досліджуваної точки  $A$  (точки спостереження);  $r$  – відстань від точки  $A$  до джерела світла  $F$  (див. рис. 1). В даній публікації ми обмежимося двовимірними ілюстраціями досліджуваних процесів та закономірностей.



**Рис.1.** Ілюстрація закону обернених квадратів для освітленості плоскої поверхні.

**Fig.1.** Illustration of the law of inverse squares for illumination of a flat surface.

Окремі питання дослідження побудови розподілу освітленості по криволінійній поверхні розглянуто в [8, 10, 12, 13, 19]. Проте, проведений аналіз показав відсутність рішень поставленої в даній публікації проблеми.

### ОСНОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ

В подальших викладках для уникнення можливих джерел похибок були прийняті наступні допущення: розрахункові відстані перевищують лінійні розміри джерела світла більш ніж в 10 разів; поглинання повітрям нехтується; світло від джерела розповсюджується плавно, розсіювання відсутнє.

При аналізі рівня освітленості криволінійних поверхонь від точкових джерел за певних умов розташування джерела світла по відношенню до досліджуваних точок можуть виникати похибки обчислень, внаслідок наявності неідентифікованих ділянок падіння власної тіні. З метою уникнення необхідності розробки принаймні частини алгоритмів, які б дозволяли визначати початки й завершення зон самозатінення, у даному дослідженні пропонується модифікувати форму запису класичного множника закону зміни освітленості, якому відповідає функція  $f_1$ , присутня в тотожності (2) у формі відомої тригонометричної функції косинуса:

$$f_1 = \cos \alpha. \quad (3)$$

Для цього виконаємо наступне.

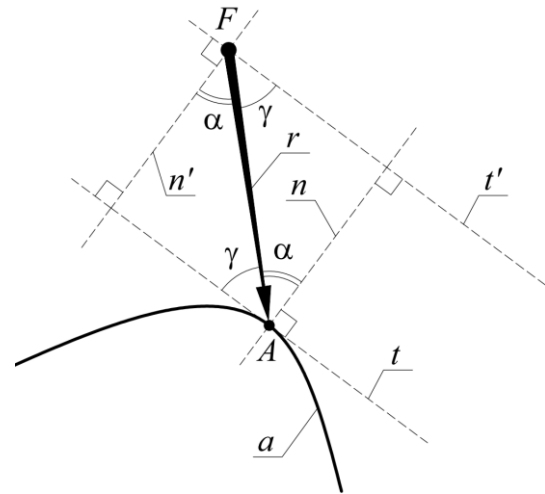
1. Скористаємося властивістю прямокутних трикутників, згідно з якою сума гострих кутів ( $\alpha$  та  $\gamma$ , див. рис. 2) становить  $\pi/2$ :

$$\alpha + \gamma = \pi/2, \quad (4)$$

звідки виразимо  $\alpha$  через  $\gamma$ :

$$\alpha = \pi/2 - \gamma. \quad (5)$$

Це дозволяє спростити розрахунок кутів, оскільки, їх значення можуть бути простіше отримані з рівнянь дотичних  $t$  до криволінійної поверхні  $a$  (рис. 2).



**Рис.2.** Ілюстрація закону обернених квадратів для освітленості криволінійної поверхні.

Позначення:  $a$  – досліджувана крива;  $t$  – площина дотична до кривої  $a$  в точці  $A$ ;  $t'$  – площина паралельна до  $t$ , що проходить через точкове джерело світла  $F$ ;  $n$  – площина нормальна до  $t$  в точці  $A$  та до площини, що утворюється променем  $r$  та його проекцією на  $t$ ;  $n'$  – площина паралельна до  $n$ , що проходить через точку  $F$ .

**Fig.2.** Illustration of the law of inverse squares for illumination of a curved surface.

Designation:  $a$  – investigated curved surface;  $t$  – the plane tangent to the surface  $a$  at point  $A$ ;  $t'$  – the plane parallel to  $t$  passing through the point light source  $F$ ;  $n$  – the plane perpendicular to  $t$  at point  $A$  and to the plane formed by the ray  $r$  and its projection on  $t$ ;  $n'$  – the plane parallel to  $n$  passing through point  $F$ .

Беручи до уваги тотожність (5), функція (3) прийме наступну форму:

$$f_1 = \cos(\pi/2 - \gamma), \quad (6)$$

а її графік представлятиме собою графік класичного косинуса кута  $\gamma$ , зміщеного на  $\pi/2$  вправо (див. рис. 3).

2. Побудуємо ще дві додаткові функції ( $f_2$  та  $f_3$ ) від кута  $\gamma$  для адаптації закону обернених квадратів до програмного застосування. Метою цих функцій має бути «вирівнювання» графіку функції  $f_1$  за межами області у проміжку значень  $\gamma$  між 0 та  $\pi$ .

При цьому значення ординат усіх точок у вирівняних областях (поза межами проміжку між 0 та  $\pi$ ) має становити 0. Найбільш підходящими для виконання поставленої мети є так звані сигмоїдальні функції. В нашому випадку сигмоїдальним функціям  $f_2$  та  $f_3$  пропонується надати класичного та модифікованого вигляду відповідно, а саме:

$$f_2 = 1/(1 + e^{-\gamma \cdot q}), \quad (7)$$

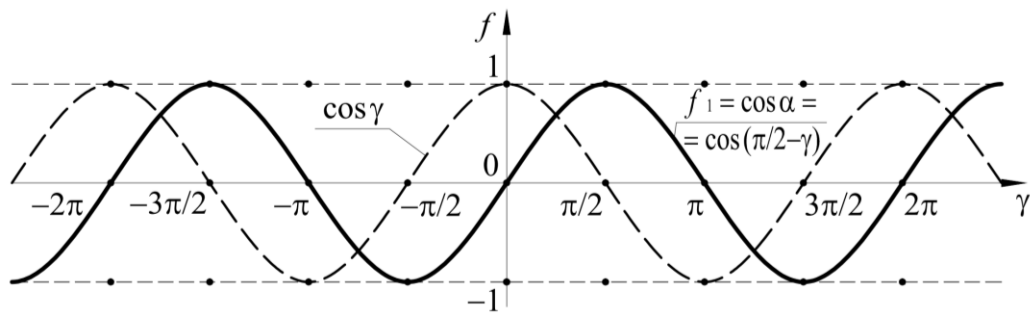
$$f_3 = 1 - 1/(1 + e^{-(\gamma-d) \cdot q}), \quad (8)$$

де  $e \approx 2.7182$  – основа натурального логарифму;  $q$  – невід’ємний коефіцієнт (як

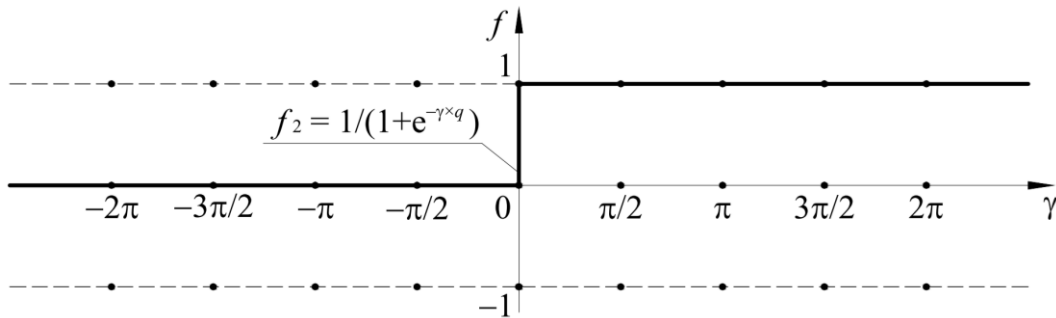
правило  $q \gg 1$ ) зі зростанням якого характер переходу графіка функції через вісь ординат стає більш різким;  $d$  – величина зміщення графіку функції по осі абсцис.

Зазначимо, що графік функції (8) буде утворено на основі графіку функції (7), дзеркально відображеного відносно осі ординат і зміщеного на величину  $d$  по осі абсцис. Графіки функцій (7) та (8) представлені на рисунках 4 та 5 відповідно.

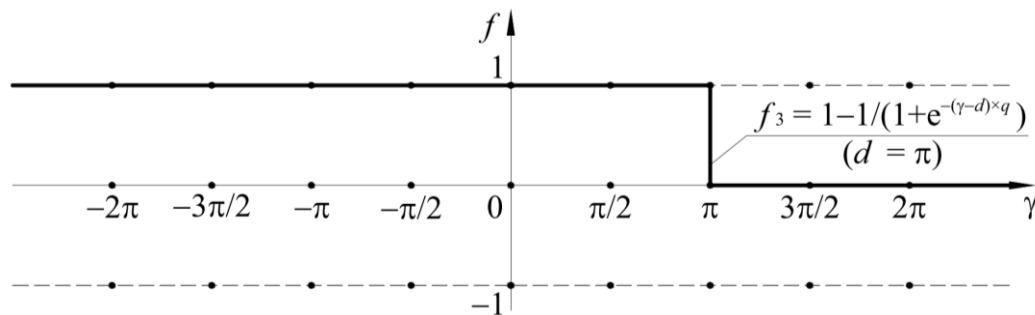
Забігаючи наперед, зазначимо, що величина параметра  $d$  має бути прийнята рівною  $\pi$  для того, щоб операція множення функцій  $f_2$  та  $f_3$  давала виділити на множині значень  $\gamma$  область  $[0; \pi]$ , для якої значення функції  $f_2 \times f_3$  становитимуть 1 (див. рис. 6).



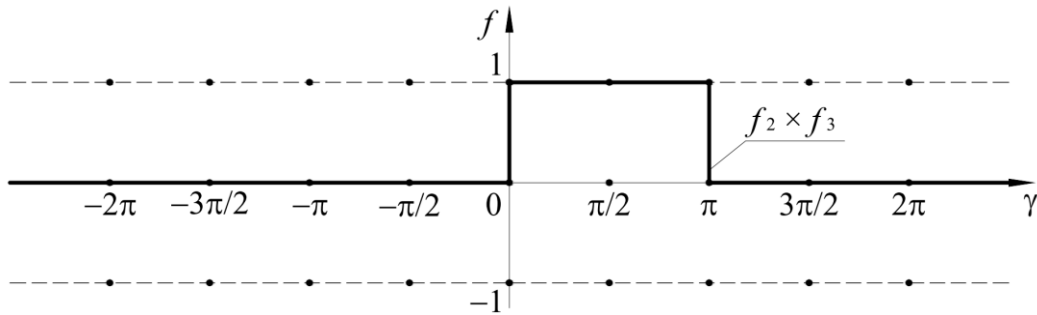
**Рис.3.** Ілюстрація графіку функції  $f_1$ .  
**Fig.3.** Illustration of the graph of the function  $f_1$ .



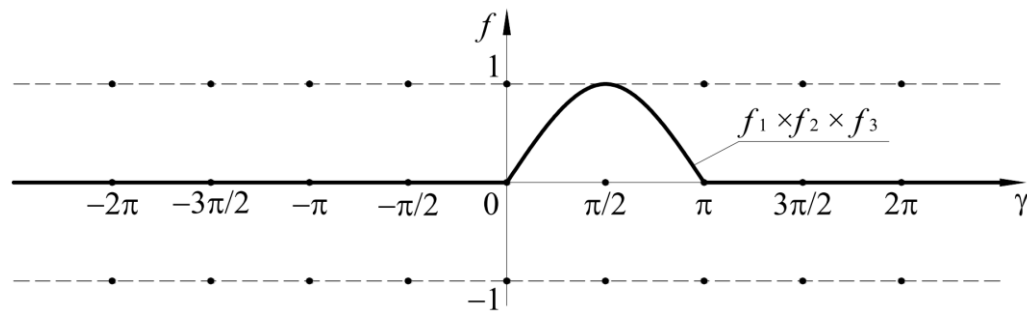
**Рис.4.** Ілюстрація графіку функції  $f_2$ .  
**Fig.4.** Illustration of the graph of the function  $f_2$ .



**Рис.5.** Ілюстрація графіку функції  $f_3$ .  
**Fig.5.** Illustration of the graph of the function  $f_3$ .



**Рис.6.** Ілюстрація графіку функції  $f_2 \times f_3$ .  
**Fig.6.** Illustration of the graph of the function  $f_2 \times f_3$ .



**Рис.7.** Ілюстрація графіку функції  $f_1 \times f_2 \times f_3$ .  
**Fig.7.** Illustration of the graph of the function  $f_1 \times f_2 \times f_3$ .

3. Замінюємо у формулі (2) функцію косинуса кута  $\alpha$  на добуток функцій  $f_1 \times f_2 \times f_3$ , в результаті чого, отримуємо наступну модифіковану (адаптовану) форму запису відповідного закону:

$$E_\alpha = (I/r^2) \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3, \quad (9)$$

або в розгорнутій формі, враховуючи формули (6) – (8):

$$E_\alpha = (I/r^2) \cdot \cos(\pi/2 - \gamma) \times [1/(1 + e^{-\gamma \cdot q})] \cdot [1 - 1/(1 + e^{-(\gamma-d) \cdot q})]. \quad (10)$$

Коефіцієнт  $q$  доцільно приймати якомога вищим для мінімізації деформування виокремленого в результаті множення функцій  $f_1 \times f_2 \times f_3$  фрагменту графіка функції  $f_1$  (див. рис. 7).

Одержана модифікована форма закону обернених квадратів дозволяє враховувати той факт, що у разі, коли промінь, випущений з точкового джерела світла до досліджуваної точки криволінійної поверхні, зустрічає на своєму шляху перешкоди у

виді інших точок цієї ж поверхні, досліджувана точка просто не може бути освітленою цим променем і являється затіненою власною тінню поверхні.

#### ВИСНОВКИ І ПЕРСПЕКТИВИ ПОДАЛЬШИХ ДОСЛІДЖЕНЬ

Запропонована адаптація закону обернених квадратів дозволяє автоматично визначати зони самозатінення при програмній реалізації без накладання додаткових обмежень у формі математичних алгоритмів із використанням логічних операторів. Відповідна модифікація повинна полегшувати процес програмної реалізації відтворення характеру розподілу освітленості криволінійних поверхонь точковими джерелами світла.

Продемонстровані функціональні доповнення дають можливість автоматично відслідковувати локальний характер зміни кута перетину дотичних до досліджуваних точок освітлювальних поверхонь та променів, що випускають точкові джерела світла в напрямку відповідних точок. Якщо такі

кути перетину стають від'ємними або перевищують  $\pi$  ( $180^\circ$ ), це свідчить, що відповідний фрагмент поверхні є самозатіненим.

Це в свою чергу дозволяє виключити з процесу програмної реалізації необхідність розробки додаткових алгоритмів ідентифікації точок переходу від освітлених до затінених областей поверхонь.

Враховуючи існуючу складність та різноманіття форм проектування і дизайну, запропонована модифікація може стати корисним інструментальним засобом реалізації комп'ютерного моделювання освітленості складних поверхонь.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Jolley L.B.W., Waldram J. M., Wilson G. H.** The theory and design of illuminating engineering. London : Chapman & Hall, 1930. 708 p.
2. **Belytschko T., Liu W.K., Moran B.** Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. New York : J. Wiley & Sons. 2000. 681 p.
3. **Болгарова Н. М., Плоский В. О., Скочко В. І.** Практичні аспекти побудови фізичної дискретної моделі теплообміну енергоєфективної будівлі. *Технічна естетика і дизайн*. КНУБА, 2018. Вип. 13. С. 9–20.
4. **Плоский В. О., Скочко В. І.** Геометричне моделювання деяких процесів тепломасообміну. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. КНУБА, 2012. Вип. 89. С. 285–295.
5. **Самарский А. А., Вабищевич П. Н.** Вычислительная теплопередача. Едиториал, 2003. 784 с.
6. **Бутов В. Г., Бухтяк М. С., Пономарев С. В.** Методика оптимального раскроя отражающей поверхности трансформируемых рефлекторов *Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики*. 2004. С. 180–181.
7. **Benker H.** Mathematik-Problemlösungen mit MATHCAD und MATHCAD PRIME. 2013. 303 p.
8. **Elmer W.B.** The optical design of reflectors, 2d ed. W.B. Elmer. Wiley, 1980. 290 p.
9. **Fournier F., Rolland J.** Design methodology for high brightness projectors. *Journal of Display Technology*. 2008. N4. P. 86–91
10. **Брус Дж., Джиблин П.** Кривые и особенности. Мир, 1988. 262 с.
11. **Богославский В. Н.** Строительная теплофизика (теплофизические основы отопления, вентиляции и кондиционирования воздуха):

[Учебник для вузов. Изд. 2 е, перераб. и доп.] Высшая школа, 1982. 415 с.

12. **Солоненко В. А., Ящук А. А.** Вопросы регулирования формы отражающей поверхности трансформируемых рефлекторов [Материалы II международной конференции студентов и молодых ученых] *Перспективы развития фундаментальных наук*. 2005. С. 123–125.
13. **Анисимов И. Н.** Решение обратной задачи при проектировании отражателей. *Светотехника*. 1991. № 4. С. 4–6.
14. **Бегунов Б. Н.** Геометрическая оптика. Учеб. пособие. Изд-во Московского университета, 1966. 196 с.
15. **Айзенберг Ю. Б., Атаев А. Е., Басов Ю. Г.** Справочная книга по светотехнике. 2006. 972 с.
16. **Frankot R., Chellappa R.** A method for enforcing integrability in shape from shading algorithms. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 1988. N 10(4). P. 439–451.
17. **Амосов А. А., Дубинский Ю. А., Копченова Н. В.** Вычислительные методы для инженеров. Учеб. пособие. Высш. шк., 1994. 544 с.
18. **Дитчберн Р.** Физическая оптика. Наука, 1965. 637 с.
19. **Oliker V.I.** Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics. *Trends in Nonlinear Analysis*. 2002. P. 191–222.
20. **Wilhem A.** Improvement in reflectors. US Patent 149,555. April 7, 1874.

#### REFERENCES

1. **Jolley L.B.W., Waldram J. M., Wilson G. H. (1930).** The theory and design of illuminating engineering. Chapman & Hall, 708 p.
2. **Belytschko T., Liu W.K., Moran B. (2000).** Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. 680 p.
3. **Bolgarova N. M., Ploskyi V. O., Skochko V. I. (2018).** Praktichny aspekty pobudovy fizychnoi dyskretnoi modeli teploobminy energoefektivnoi budivli. *Technichna estetyka I dizain*, 13, 9–20 (in Ukrainian).
4. **Ploskyi V. O., Skochko V. I. (2012).** Heometrychne modeliuвання deyakych processiv tepломасообміну. *Prykladna heometriya ta inzhenerna hrafika*. 89, 285–295 (in Ukrainian).
5. **Samarskii A. A., Vabyshvych P. N. (2003).** Vycheslitelnya teploperedacha. Editorial, 784 (in Russian).

6. **Butov V. H., Bukchtiak M. S., Ponomariov S. V. (2004).** Metodika optimalnogo raskroya otrazhayushchey poverchnosti transformiruemym reflektorov. *Fundamentalnye i prikladnye problemy sovremennoy mekhaniky*, 180–181 (in Russian).
7. **Benker H. (2013).** Mathematik-Problemlösungen mit MATHCAD und MATHCAD PRIME, 303.
8. **Elmer W.B. (1980).** The optical design of reflectors, 2d ed. W.B. Elmer. Wiley, 290.
9. **Fournier F., Rolland J. (2008).** Design methodology for high brightness projectors. *Journal of Display Technology*, 4, 86–91.
10. **Brus Dzh., Dzhibliin P. (1988).** Krivie i osobennosti, 262 (in Russian).
11. **Bogoslavskiy V.N. (1982).** Stroitel'naya teplofizika (teplofizicheskiye osnovy otopleniya, ventilyatsii i konditsionirovaniya vozdykha) Vyschaya shkola, 415 (in Russian).
12. **Solonenko V. A., Yashuk A. A. (2005).** Voprosy regulirovaniya formy otrazhayushchey poverchnosti transformiruemym reflektorov. *Perspektivy razvitiya fundamentalnykh nauk*, 123–125 (in Russian).
13. **Anisimov I. N. (1991).** Resheniye obratnoy zadachi pri proektirovani otzrazhateley, Svetotekhnika. 2, 4–6 (in Russian).
14. **Begunov B. N. (2006).** Geometricheskaya optika, 196 (in Russian).
15. **Ayzenberg Yu. B., Ataev A. E., Basov Yu. G. (2006).** Spravochnaya kniga po svetotekhnike, 972 (in Russian).
16. **Frankot R., Chellappa R. (1988)** A method for enforcing integrability in shape from shading algorithms. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 10(4), 439–451.
17. **Amosov A. A., Dubinskiy Yu. A., Kopchenova N. V. (1994).** Vycheslitenyye metody dlya inzhenerov. *Vyschaya shkola*, 544 (in Russian).
18. **Ditchbern R. (1965).** Fizicheskaya optika, 637 (in Russian).
19. **Oliker V.I. (2002).** Mathematical aspects of design of beam shaping surfaces in geometrical optics, *Trends in Nonlinear Analysis*, 191–222.
20. **Wilhem A. (1874).** Improvement in reflectors. US Patent 149, 555.

**Some aspects of determining the level of illumination of curved surfaces from point sources**

*Hanna Kopasova, Volodymyr Skochko,  
Serhii Kozhedub*

**Summary.** As a rule, to determine the level of illumination of surfaces from point sources, a fairly

simple regularity (the law of inverse squares) and template rules for constructing incident rays can be used.

This regularity is most applicable for surface areas that are fragments of planes (or fragments close to planes).

At the same time, when developing the design of the internal or external environment, objects and objects are very often encountered whose surfaces are curved. At the same time, one of the main tasks of designers and architects is to ensure a sufficient level of illumination of interior and exterior items to ensure the reliability of the perception of their shapes and colors, as well as to achieve the necessary level of visual comfort. In the end, due to the high complexity and variety of spatial forms, specialists have to use computer simulation software for calculations related to determining or checking the level of illumination. At the same time, tools involving manual calculations are becoming less and less relevant. In the process of software implementation of mathematical methods and algorithms for determining the level of illumination, it becomes important to eliminate the probability of making design errors associated with the inability of the software to logical thinking and analysis of obstacles to the propagation of light rays. In particular, when it comes to analyzing the nature of surface illumination from a point source (which can be arbitrarily considered almost any lighting device that uniformly scatters light, and whose dimensions are much smaller in comparison with the dimensions of surrounding objects), it turns out that the use of the inverse square law does not allow identify self-shadowing zones during its program implementation in the classical form without imposing additional restrictions. Such restrictions are manifested in the application of a number of logical operators and template algorithms for identifying areas of incidence of its own shadow. To avoid the need to develop appropriate algorithms, this study proposes to modify the notation form of the inverse square law by introducing additional mathematical functions into it. These functions will automatically track the local nature of the change in the angle of inclination of the tangents to the considered points of the illuminated surfaces.

The corresponding modification will facilitate the process of software implementation of the process of reproducing the distribution of illumination over a curved surface.

**Keywords.** Lighting devices; point source of light; inverse square law; computer modelling.